به‌نام ایزد یکتا

تعدیل و سرشکنی خطاهای مشاهدات نقشه‌برداری

تألیف: مهندس داود جباری سابق
گروه مپنا
انتشارات پندار پارس

سرشناسه	:	جباری‌سابق، داود، ۱۳۴۶ -
عنوان و نام پدیدآور	:	تعدیل و سرشکنی خطاهای مشاهدات نقشه‌برداری/ تالیف داود جباری‌سابق.
مشخصات نشر	:	تهران : پندار پارس: شرکت مدیریت پروژه‌های نیروگاهی ایران (مپنا)، ۱۴۰۲.
مشخصات ظاهری	:	۲۸۸ص.: مصور، جدول، نمودار.
شابک	:	978-622-7785-19-7
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
یادداشت	:	کتابنامه:ص۳۰۲
موضوع	:	نقشه‌برداری-- ریاضیات Surveying-- Mathematics - نقشه‌برداری -- نرم‌افزار -- Surveying Software ، نگاشت (ریاضیات) (Mappings Mathematics) ، ژئودزی Geodesy ، تحلیل فضایی (آمار) (Spatial analysis Statistics) ، اشتباه‌ها -- نظریه (Error analysis Mathematics)
رده بندی کنگره	:	TA۵۵۶
رده بندی دیویی	:	۹/۵۲۶
شماره کتابشناسی ملی	:	۹۲۷۰۹۹۹
اطلاعات رکورد کتابشناسی	:	فیپا

انتشارات پندارپارس

دفتر فروش: انقلاب، ابتدای کارگرجنوبی، کوی رشتچی، شماره ۱۴، واحد ۱۶ **www.pendarepars.com**

تلفن: ۶۶۵۷۲۳۳۵ - تلفکس: ۶۶۹۲۶۵۷۸ همراه: ۰۹۱۲۲۴۵۲۳۴۸ **info@pendarepars.com**

نام کتاب	:	**تعدیل و سرشکنی خطاهای مشاهدات نقشه‌برداری**
ناشر	:	**انتشارات پندار پارس، با همکاری شرکت مپنا**
تالیف	:	**داود جباری سابق**
چاپ نخست	:	**شهریور ۱۴۰۲**
شمارگان	:	**۲۰۰ نسخه**
صفحه‌آرایی	:	**حسن یعسوبی**
چاپ، صحافی	:	**چاپ دیجیتال روز**
قیمت	:	**۲۴۰.۰۰۰ تومان شابک : ۷-۱۹-۷۷۸۵-۶۲۲-۹۷۸**

دیباچه

بدون تردید اندازه‌گیری، یکی از مهمترین اقدامات در ارزیابی، طراحی و اجرای طرح‌های مهندسی است. علی‌رغم قدمت این موضوع، نیازمندی‌های جدید و پیشرفت در روش‌ها و ابزارها، موضوع اندازه‌گیری را برای پژوهشگران و مهندسان همچنان جذاب نگهداشته است. در این میان، نقشه‌برداری به عنوان یکی از شاخه‌های اندازه‌گیری مهندسی، نقش بی‌بدیلی در اجرای موفق طرح‌های زیربنایی مانند صنعت برق، حمل و نقل ریلی و نفت و گاز بازی می‌کند. بر این اساس، گروه مپنا با توجه به چند دهه فعالیت ملی و بین‌المللی در سه صنعت فوق، تجربیات گسترده‌ای در زمینه نقشه‌برداری را داراست.

به جهت ایفای نقش و مسئولیت اجتماعی، بر آن شدیم که دانش و تجربه یکی از کارشناسان برجسته خود در این زمینه را با چاپ کتاب حاضر، با مهندسان و پژوهشگران این حوزه به اشتراک بگذاریم.

این کتاب با ارائه مفاهیم اصلی و پایه‌ای، نکات ناب برگرفته از تجربیات نویسنده در پروژه‌های متنوع در دو دهه فعالیت حرفه‌ای در نقشه‌برداری اجرایی را در بردارد. امید می‌رود مطالب این کتاب در گسترش این حوزه تخصصی در کشور عزیزمان مفید واقع شود.

محمودرضا حقی‌فام

معاون پژوهش و فناوری گروه مپنا

شهریور ۱۴۰۲

فهرست

بنام ایزدمنان که به قلم سوگند خورده است

پیش‌گفتار و یادداشت مؤلف

همه محاسبات موفق با اندازه‌گیری دقیق شروع می‌شود. موفقیت در احداث یک پروژه صنعتی ساخت یک نیروگاه ایجاد یک بزرگراه و تمامی پروژه‌های عمرانی، نیازمند اطلاعات و اندازه‌های دقیق و نقشه‌برداری بی نقص است.

مبحث تئوری خطاها و سرشکنی و تعدیل و ارزیابی خطاهای مشاهدات نقشه‌برداری، برای اجرای یک پروژه‌ی نقشه‌برداری سالم و بدون نقص، بحثی حیاتی محسوب می‌شود. در این میان، سرشکنی خطاها به روش کمترین مربعات، بیشترین کاربرد را دارد و تقریبا در هر پروژه‌ی نقشه‌برداری، پس از انجام مشاهدات نقشه‌برداری، سرشکنی خطاها و ارزیابی نتایج آن اصلی‌ترین قسمت محاسباتی پروژه را شامل می‌شود.

این کتاب، حاصل بیش از دو دهه تجربه در تدریس درس اجسمنت و تست و حدود سی سال تجربه در امور اجرایی و نقشـه‌برداری صنعتی و دقیق بوده و حاوی تجربیات حاصل از تدریس، اشتغال در امور نقشه‌برداری اجرایی، از جمله نقشه‌برداری صنعتی (پالایشگاه، پتروشیمی، نیروگاه‌های حرارتی، نیروگاه‌های سیکل ترکیبی، سدهای خاکی و بتنی)، نقشه‌برداری ژئودتیک (طراحی و اجرای شبکه میکروژئودزی بر روی گســل، سد و نیروگاه)، و نقشه‌برداری برای طراحی و اجرای شبکه‌های مانیتورینگ و پایش کنترل نشست و تغییر شکل سازه‌ها و ساختمان‌های بلند (مترو برج و سازه‌های حساس صنعتی) می‌باشد. بنابراین زوایا و نکات باریک امور نقشه‌برداری اجرایی را در بر گرفته است و اساس و پایه‌های این کتاب، مبتنی بر حل‌وفصل مسائل گوناگون در نقشه‌برداری اجرایی بوده و از طرف دیگر سعی بر آن بوده که مفاهیم به‌صورت سخت و پیچیده جلوه ننماید؛ بلکه برای حل و فصل مسائل و انجام پروژه‌های اجرایی نقشه‌برداری زمینی، نقشه‌برداری ژئودتیک، ژئودزی و فتوگرامتری نیز قابل استفاده باشد.

کتاب موجود در پنج فصل تهیه گردیده است، فصل اول؛ ضرورت سرشکنی کمترین مربعات مشاهدات نقشه‌برداری، فصل دوم؛ روش‌های سرشکنی کمترین مربعات، فصل سوم؛ سرشکنی معادلات ژئودزی، مفاهیم، تعاریف و مثال‌هایی در این زمینه، فصل چهارم؛ سرشکنی شبکه‌های سه بعدی و پیش‌تحلیل و طراحی شبکه، و فصل پنجم؛ تست و ارزیابی آماری مشاهدات، تست شبکه، تست مدل‌های ریاضی انتخابی و تست نتایج بدست آمده از سرشکنی را ارائه می‌دهد.

اساتید بزرگوار و مهندسان ارجمند و دانشجویان گرامی را در تکمیل این کتاب به یاری طلبیده و از آنها می‌خواهم با راهنمایی‌های ارزشمند خود، در ارائه پر بار این کتاب در آینده، مشوق و راهنمای اینجانب باشند. بنابراین خواهشمند است نظرها و پیشنهادهای خود را به آدرس ایمیل زیر ارسال فرمایید: jabbari@mapnagroup.com یا jabbari.davood@gmail.com

داود جباری سابق، تابستان ۱۴۰۲

تقدیم به همسر عزیزم

به‌خاطر همه خوبی‌ها و مهربانی‌های بی‌دریغش

فصل اول

مفاهیم اولیه سرشکنی

۱-۱ تعریف خطا در مشاهدات نقشه‌برداری و ضرورت انجام سرشکنی

یکی از مفاهیم اولیه در علم نقشـه‌برداری، مشاهده بوده و اصلی‌ترین و مهم‌ترین فعالیت در نقشه‌برداری، جمع‌آوری مشاهدات است؛ یا به عبارت دیگر، نقشه‌بردار همواره با اندازه‌گیری سر و کار دارد. برای تهیه نقشه از یک منطقه، لازم است یک‌سری اندازه‌گیری‌ها و مشاهدات، جمع‌آوری شود تا به وسیله‌ی آنها امکانی فراهم گردد که عوارض موجود در منطقه، به روی شیت کاغذ (نقشه) با مقیاس دلخواه انتقال داده شود. در واقع هدف نقشه‌بردار، جمع‌آوری اطلاعاتی است که بتواند شرایط هندسی مطلوب برای ارائه‌ی حالت فیزیکی محیط مورد نظر را فراهم آورد. از سویی دیگر، همیشه اندازه‌گیری و مشاهده توأم با خطا می‌باشد؛ زیرا از یک سو نقشه‌بردار به عنوان عامل، دارای دقت محدود بوده و از سوی دیگر دستگاه های نقشه‌برداری از دقت محدودی برخوردارند و محیط اندازه‌گیری در شرایط استاندارد قرار ندارد. با توجه به موارد مذکور، سؤال مهم زیر برای خواننده‌ی کتاب مطرح می‌شود:

با توجه به این نکته که مشاهدات همواره توأم با خطا می‌باشند، برای دریافت نتیجه‌ی مطلوب و برای رسیدن به جواب صحیح، چه راه‌حلی باید انتخاب گردد؟ چگونه باید با مشاهدات خطادار برخورد شود؟ نوع مشاهده‌ای که لازم است، باید چه نوعی باشد؟ چه تعداد مشاهده باید جمع‌آوری گردد؟ کیفیت این مشاهده چگونه باشد که جوابگوی نیاز باشد؟

یافتن جواب برای این سؤالات در نقشه‌برداری، لزوم یادگیری سرشکنی مشاهدات (اجسمنت و تست[1]) را نمایان می‌سازد. در ضمن شایان ذکر است که در سطوح بالاتر در ژئودزی و میکروژئودزی[2] سؤالات مشابهی با سؤالات بالا وجود دارد. به طور مثال با توجه به دقت خواسته شده، چه شکل هندسی برای شبکه انتخاب شود؟ کیفیت و کمیت مشاهدات به چه صورت باشد؟

---

[1] *Adjustment and Testing*
[2] *Geodesy and Microgeodesy*

مشاهدات جمع‌آوری شده به چه نحوی مورد تست قرار گیرند؟ این مشاهدات در قالب چه مدل ریاضی ما را به جواب نهایی می‌رساند؟ و ...

تمامی این سؤالات در این کتاب پاسخ داده می‌شود. در واقع این کتاب به خواننده می‌آموزد که با استفاده از دانش ریاضی که در طول تحصیل خود کسب نموده است، چه راه حل ریاضی را انتخاب کند و به چه صورت خطاهای غیر قابل انکار و غیر قابل اجتناب در مشاهدات را مورد بررسی و پردازش قرار بدهد تا تأثیر این خطاها در نتایج حاصله، به حداقل مقدار ممکن برسد.

برای شروع لازم است مفاهیمی که در طول مباحث کتاب مورد استفاده قرار خواهند گرفت، مورد بررسی قرار گیرند. بنابراین به تعریف یکسری پارامترهای اصلی از جمله مجهول، مدل ریاضی و مشاهدات می‌پردازیم.

۱-۲ مشاهدات (L) Observations

مشاهدات، به پارامترهایی گفته می‌شود که مستقیماً و با استفاده از وسایل متفاوت نقشه‌برداری، قابل اندازه‌گیری می‌باشند. مثلاً اندازه‌گیری طول با استفاده از طول‌یاب یا اندازه‌گیری زاویه با استفاده از تئودلیت و یا اندازه‌گیری ارتفاع با استفاده از ترازیاب، نمونه‌ای از مشاهدات در نقشه‌برداری می‌باشند. شکل هندسی مدل ریاضی، نوع مشاهدات و نتایج حاصله از مرحله‌ی طراحی و پیش‌تحلیل[۱]، کیفیت و تعداد مشاهدات را معلوم می‌نماید؛ یعنی شیوه‌ی جمع‌آوری مشاهدات و نوع و تعداد مشاهدات و اینکه با چه دقتی و با چه دستگاه‌هایی مشاهدات جمع‌آوری شود تا بتوان با آن مشاهدات، به نتیجه‌ی مطلوب رسید، در مرحله‌ی مهم جمع آوری مشاهدات، باید مد نظر قرارگیرند. به عبارت دیگر، مشاهدات و اطلاعات باید با توجه به دقت خواسته شده برای تعیین مجهولات، اندازه‌گیری‌و جمع‌آوری شوند. در این مرحله ضروری است که شناخت کافی از دستگاه‌ها و دقت آنها و نحوه‌ی جمع‌آوری مشاهدات (مثلاً تعداد کوپل زوایا) بدست آید و برنامه دقیقی برای جمع‌آوری مشاهدات تدوین گردد. در مورد پیش‌تحلیل و طراحی شبکه، در ادامه بحث خواهد شد. مشاهدات با بردار L و تعداد مشاهدات با n نشان داده می‌شوند (L_n).

مفاهیمی در مورد مشاهدات وجود دارد که لازم است مورد بحث قرار گیرند. اولین مفهوم در مورد کمیت مشاهدات، و مفاهیم دیگر در مورد کیفیت مشاهدات است که در ادامه بررسی می‌شوند.

---

[1] *Pre Analysis*

۱-۳ خطا در مشاهدات (Error)

مشاهدات نقشه‌برداری با توجه به ساختار و شکل‌گیری آنها، دارای خصوصیات آماری بوده و به‌عنوان داده‌های آماری شناخته می‌شوند. به‌عبارت دیگر، مشاهدات به‌عنوان یک نمونه آماری از جامعه آماری، قابل بررسی بوده و ویژگی‌های نمونه آماری را دارند.

خطا در مشاهدات، جزء جدایی‌ناپذیر آن است؛ چرا که تکرار اندازه‌گیری هر المان به‌دلایل شرایط دستگاهی و شرایط محیطی و اپراتوری، دارای مقدار متفاوت خواهد بود و به‌عبارت دیگر، در اندازه‌گیری طول مابین دو نقطه با دستگاه توتال استیشن[1]، اگر سه بار اندازه‌گیری تکرار شود سه قرائت متفاوت به‌دست می‌آید و علت اختلاف در سه المان اندازه‌گیری عبارتند از: تفاوت در سانتراژ دوربین و تارگت، محدودیت دقت دوربین و تارگت، دقت در نشانه روی اپراتور، شرایط محیطی و نور محیط و دما و فشار، شرایط اتمسفری بین دو نقطه و دقت منشور یا رفلکتور در بازتابی اشعه دریافتی.

بنابر این، منشاء بروز خطا در مشاهدات نقشه‌برداری، متنوع است و بروز خطا در مشاهدات حتمی خواهد بود. در حالت کلی، سه نوع خطا در مشاهدات نقشه‌برداری وجود دارد: ۱- خطاهای تصادفی، ۲- خطاهای سیستماتیک، ۳- اشتباه‌های بزرگ

توضیحات بیشتر در مورد خطاهای نقشه‌برداری، در کتاب‌های تئوری خطاها قابل دسترس بوده و با در نظر گرفتن مشاهدات همراه با خطا، به سرشکنی خطاها پرداخته می‌شود.

۱-۴ مجهول X (Unknown)

به پارامترها و المان‌هایی که امکان اندازه‌گیری مستقیم آنها میسر نیست و برای به‌دست آوردن آنها، لازم است در قالب یک روش هندسی خاص و با اندازه‌گیری پارامترهای مشخص، اقدام به محاسبه‌ی این المان‌ها نمود، *مجهول* گفته می‌شود. در واقع هدف اولیه‌ی نقشه‌برداری، دست‌یابی به این مقادیر مجهول می‌باشد.

پارامترهای مجهول، با بردار X و تعداد مجهول‌ها، با u نشان داده می‌شوند (X_u). از جمله مقادیر مجهول در نقشه‌برداری می‌توان به مواردی از این دست اشاره کرد: مساحت یک محیط بسته، حجم عملیات خاکی، ژیزمان[2] یک امتداد خاص، مختصات Z، Y، X یک نقطه در سیستم مختصات معلوم محلی، منطقه‌ای و یا جهانی، یا پارامترهای جزر و مد و یا مقدار ثابت جاذبه (g). از سویی دیگر، در

[1] *Total Station Instrument*
[2] *Gisman*

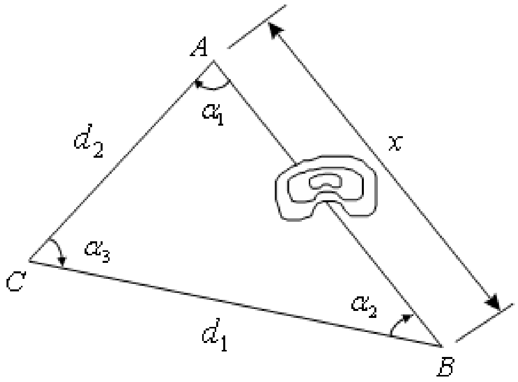
نقشه‌برداری، علاوه بر پارامتر مجهول، دقت مجهول نیز مهم می‌باشد. مثـلاً لازم است نقطه‌ی A با دقت ۵ میلـی‌متر مختصات‌دهی شود، بنابراین درنقشه برداری، علاوه بر شناخت مجهول و محاسبه‌ی آن، مطلب مهم این است که پارامترهای مجهول، به چه نحوی تعیین شوند که دقت برآورد آنها مطلوب باشد. این مطلب را می‌توان به این صورت عنوان کرد که یک منطقه‌ی اطمینان تعریف شود که نقطه‌ی محاسبه شده، با درصد احتمال مورد نظر در داخل آن منطقه باشد.

۱–۵ مدل ریاضی

زمینی که روی آن مشاهده انجام می‌گیرد، زمینی واقعی و قابل لمس است که توپوگرافی و عوارض آن، ما را مجبور به پیروی از خود می‌کند؛ یعنی محاسبات و مشاهدات باید از وضعیت فیزیکی زمین پیروی نمایند و این موضوع باعث پیدایش محدودیت ریاضی می‌شود. به این محدودیت ریاضی که به صورت یک شکل هندسی مثل مثلث، نمود پیدا می‌کند، *مدل ریاضی* گفته می‌شود و مشاهدات باید در قالب این شکل هندسی پی‌ریزی و جمع‌آوری شوند. در واقع مدل ریاضی، اسکلت هندسی مشاهدات را مشخص می‌نماید.

درعلم نقشه‌برداری، مدل ریاضی به این صورت تعریف می‌شود: "یک شکل هندسی که برای محاسبه و ارتباط مشاهدات و مجهولات با هم بـه‌کـار می‌رود و به‌صورت تابعی ارائه می‌گردد."

مثلاً فاصله‌ی افقی AB با توجه به شکل زیر مجهول می‌باشد و فرض بر این است که در فاصله‌ی بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی B یک کوه وجود دارد، که امکان اندازه‌گیری مستقیم طول AB را غیرممکن می‌نماید. بنابراین، یک محدودیت طبیعی وجود دارد که باید مد نظر قرار گیرد و از آن پیروی شود. برای حل مشکل باید یک نقطه‌ی کمکی مانند C در نظرگرفته شود؛ یعنی محدودیت فیزیکی زمین باعث می‌شود که از یک شکل هندسی به نام مثلث پیروی شود. پس شکل هندسی، مثلث بوده و روابط موجود در مثلث، مدل ریاضی را تشکیل می‌دهند. شکل هندسی مثلث، اسکلت هندسی مدل و قوانین ریاضی موجود در مثلث، همان مدل ریاضی می‌باشند. با فرض اینکه بتوان سه زاویه و دو طول از این مثلث (شکل ۱–۱) را مشاهده نمود و با انجام مشاهدات مذکور (سه زاویه و دو طول مثلث، کلاً 5 مشاهده)، روابط ریاضی شناخته شده‌ی زیر را در مثلث می‌توان نوشت:



شکل ۱-۱؛ شکل هندسی مدل ریاضی

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180\\
&2)\quad \frac{d_1}{Sin\alpha_1}=\frac{x}{Sin\alpha_3}\\
&3)\quad \frac{d_2}{Sin\alpha_2}=\frac{x}{Sin\alpha_3}\\
&4)\quad d_1^2=d_2^2+x^2-2d_2\,xCos\alpha_1\\
&5)\quad d_2^2=d_1^2+x^2-2d_1\,xCos\alpha_2\\
&6)\quad x^2=d_1^2+d_2^2-2d_1\,d_2\,Cos\alpha_3
\end{aligned}
\qquad (۱-۱)
$$

کل روابط ریاضی که در مثلث برقرار است به‌شرح فوق بوده و یک مجموعه‌ی سه تایی از آنها پاسخ‌گوی نیاز برای محاسبه‌ی مجهول مورد نظر (محاسبه‌ی طول AB)، کافی می‌باشد. باید مشخص نمود که کدام مجموعه ی سه تایی از مدل‌های ریاضی فوق، انتخاب شود تا کمترین خطا در محاسبه‌ی x ایجاد شود و نیز، نحوه‌ی تست مدل ریاضی برای اینکه آیا مدل ریاضی به درستی انتخاب شده است یا نه، کدام است؟ (دراین کتاب به تفصیل، این موارد توضیح داده خواهند شد).

به خاطر اهمیت مدل ریاضی، لازم است در این مورد، بحث بیشتری صورت پذیرد؛ چرا که انجام سرشکنی روی مشاهدات در قالب مدل‌های ریاضی صورت می‌پذیرد.

۱-۵-۱ المان‌های مدل ریاضی

هر مدل ریاضی دارای حداکثر سه المان به شرح زیر می‌باشد:

۱. المان اول را ثابت[1] گویند. مثلا عدد 180 در $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180$ یک ثابت در مدل ریاضی می‌باشد. المان‌هایی که مقادیر آنها ثابت است (ثوابت) با C نشان داده می‌شوند. البته در برخی از مدل‌های ریاضی، المان ثوابت وجود ندارد (مثل مدل‌های شماره‌ی ۴ و ۵ و ۶ درمثال پیشین).
۲. المان دوم، المان مشاهدات است که باید اندازه‌گیری شوند و با L نشان داده می‌شوند.
۳. المان سوم، عناصری می‌باشند که مستقیماً قابل اندازه‌گیری نیستند و با x نشان داده می‌شوند و مجهولات نامیده می‌شوند.

برای اینکه یک مدل ریاضی قابل حل باشد باید هر یک از المان‌های مدل به تعداد کافی موجود باشد. در حالت کلی، ممکن است یک مدل ریاضی مورد استفاده در نقشه‌برداری شامل تعداد زیادی مشاهده و ثوابت و تعداد محدودی مجهولات باشد.

۱-۵-۲ تقسیم‌بندی مدل‌های ریاضی از نظر فرم و شکل

از نظر فرم و شکل، مدل‌های ریاضی به سه دسته تقسیم می‌شوند که عبارتند از:

الف- مدل‌های مستقیم

مدل‌هایی هستند که در آنها ارتباط بین مشاهدات و مجهولات به طور مستقیم برقرار می‌گردد. در واقع، این مدل‌ها مستقیماً بیان می‌کنند که مجهولات، تابعی از مشاهدات است. مثلاً مساحت یک زمین مستطیل شکل به ابعاد a و b یعنی $x = a.b$ (در این مدل ریاضی با مشاهده‌ی a و b، مستقیماً مساحت یعنی مجهول x محاسبه می‌شود).

ب- مدل‌های غیر مستقیم

مدل‌هایی هستند که در آنها مشاهدات به طور صریح، تابعی از مجهولات می‌باشند؛ یعنی با اندازه‌گیری مستقیم مشاهدات نمی‌توان به مجهولات رسید. برای مثال اگر طول میان دو نقطه با مختصات مجهول($A(x,y)$, $B(x,y)$) مشاهده شود نمی‌توان مجهولات (x,y دو نقطه) را با استفاده از این مشاهده (طول) برآورد نمود. بنابراین مجبوریم یک دستگاه از معادلات تشکیل دهیم.

$$L_{AB}=\left((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۲)$$

[1] *Constant*

پ- مدل‌های ضمنی

در این قبیل مدل‌ها، مشاهدات به صورت مستقیم و صریح تابعی از مجهولات نمی‌باشند؛ بلکه رابطه‌ی میان مشاهدات و مجهولات به شکل یک تابع است که به صورت $F(X,L)= 0$ بیان می‌شود. این مدل‌ها، بیشتر غیرخطی است. برای مثال می‌توان از مدل تعیین موقعیت قایق در حال حرکت که موقعیت آن تابع زمان است نام برد.

۱-۶ فراوانی مشاهدات (*Redundency*)

اگر مشاهده بیش از مقدار مورد نیاز جمع‌آوری شود، در این حالت مدل ریاضی قابل حل[1] نامیده می‌شود و گفته می‌شود که مشاهدات، فراوانی[2] دارند. در واقع یک پروژه‌ی نقشه‌برداری که دارای طراحی خوبی باشد، المان مشاهداتی مدل آن، دارای فراوانی است. مثلاً اگر در مثلث شکل (۱-۱) مثال قبل، نتیجه‌ی آنالیز اولیه به این صورت باشد که: اگر مشاهدات زاویه با ۳۰ کوپل قرائت، انجام شود نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید یعنی در این مثال فراوانی مشاهدات بالا است. هر چقدر فراوانی مشاهدات بالا باشد یا به عبارت دیگر تعداد مشاهدات زیاد باشد، درجه‌ی آزادی بیشتر شده و سرشکنی با دقت بالاتری صورت می‌پذیرد. در واقع عمداً اقدام به جمع‌آوری مشاهدات اضافی و بیش از مورد نیاز می‌شود تا جواب‌های مطمئن‌تری به دست آید.

مثلاً در مثلث شکل (۱-۱) اگر هر یک از مشاهدات ۹ بار تکرار شود، بدین ترتیب در مجموع ۴۵ مشاهده وجود خواهد داشت و هر سری از مشاهدات با فراوانی مشخص، نتیجه‌ی خاصی را خواهند داد. دیده می‌شود که هر سری از مشاهدات با فراوانی متفاوت، جواب‌های متفاوتی را نتیجه می‌دهد. این معقولانه نیست و باید همه‌ی مشاهدات به طور همزمان به مدل ریاضی آورده شوند تا مقادیر مشابه و در واقع یکسان برای مجهولات محاسبه شوند که این پروسه را سرشکنی می‌گوییم.

۱-۷ مفاهیم مربوط به کیفیت مشاهدات: وزن و دقت مشاهدات[3]

وقتی در مورد کیفیت مشاهدات بحث می‌شود، دقت و وزن و صحت، سه مطلب مهم در این رابطه می‌باشند. همانطورکه گفتیم در نقشه‌برداری، مشاهدات به عنوان یک کمیت آماری در نظر گرفته می‌شوند. در ضمن به دلیل تصادفی بودن خطای اتفاقی در مشاهدات نقشه‌برداری، می‌توان گفت که

---

[1] *Overdetermind*
[2] *Redundency*
[3] *Precision & Weight*

مشاهدات مستقل از هم، از توزیع گوس (نرمال)[1] پیروی می‌کنند یا به عبارت دیگر، می‌توان گفت که مشاهدات یک نمونه‌ی آماری، دارای تابع چگالی توزیع نرمال می‌باشند. به تعریفی دیگر، یک‌سری از مشاهدات نقشه‌برداری عبارت است از یک نمونه‌ی آماری از جامعه‌ی آماری بزرگتر. برای درک بهتر این موضوع به مثال زیر توجه شود.

مثال: اگر امکان داشت که بی‌نهایت بار یک طول یا یک زاویه را مشاهده و سپس میانگین مشاهدات را محاسبه نمود، در این صورت صرف نظر از اشتباهات و خطاهای سیستماتیک، خطای مقدار میانگین صفر می‌شد یا به عبارت دیگر مقدار واقعی مشاهده به‌دست می‌آمد اما به دلیل محدودیت وقت و مسئله‌ی هزینه و ... از این بی‌نهایت بار، یک نمونه به تعداد مثلاً ۱۰ انتخاب می‌شود، یا به عبارت دیگر طول مورد نظر ۱۰ بار اندازه‌گیری می‌شود.

برای یک نمونه‌ی آماری، پارامترهای انحراف معیار، واریانس و متوسط حسابی را می‌توان با استفاده از فرمول‌های زیر محاسبه کرد:

واریانس : $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(L_i - \overline{L})^2}{n-1}$$

متوسط حسابی: $$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$$

انحراف معیار: $$S = \sqrt{S^2} \qquad (۱-۳)$$

با توجه به مطالب مذکور و با این فرض که مشاهدات، کمیت‌های آماری می‌باشند به تعریف مفاهیم وزن و دقت مشاهدات می‌پردازیم.

دقت یک مشاهده متناسب با عکس واریانس مشاهده است ($\propto \frac{1}{\sigma^2}$دقت). یک مشاهده وقتی دقت بالایی دارد که واریانس (σ^2) یا انحراف معیار (σ) یا S کوچکی داشته باشد؛ بنابراین مشاهدات با دقت کم، واریانس بزرگتری خواهند داشت.

کمیت دیگری که برای اندازه‌گیری کیفیت مشاهدات به کار می‌رود، وزن است. هر مشاهده با دقت بالاتر دارای وزن بالاتر می‌باشد و برعکس، هر مشاهده با دقت پایین‌تر دارای وزن کمتر می‌باشد.

---

[1] *Gauss Normal Distribution Function*

وزن یک مشاهده برابر است با $P = \frac{k}{\sigma^2}$؛ برای مثال اگر وزن مشاهده‌ای مقدار یک داشته باشد در آن صورت واریانس آن برابر است با:

$$P = 1 \Rightarrow \sigma^2 = k = \sigma_0^2$$

σ_0^2 واریانس اولیه است یا به عبارت دیگر، واریانس مشاهده با وزن یک می‌باشد، که فاکتور واریانس اولیه نیز نامیده می‌شود، فاکتور واریانس اولیه، انتخابی بوده و معمولا مقدار آن آگاهانه انتخاب می‌شود و البته می‌توان مقدار آن‌را یک فرض نمود. در ادامه، درباره‌ی اهمیت فاکتور واریانس اولیه و نحوه انتخاب آن بحث خواهد شد.

همبستگی بین مشاهدات را "کوواریانس" گویند. اگر دو مشاهده با یکدیگر ارتباط داشته باشند و وابستگی بین آنها وجود داشته باشد، کوواریانس وجود خواهد داشت. اما بیشتر در نقشه‌برداری، مشاهدات را مستقل از هم در نظر می‌گیرند. بنابراین ماتریس واریانس-کوواریانس مشاهدات، یک ماتریس قطری می‌باشد.

برای بردار مشاهدات با تعداد n مشاهده، ماتریسی با نام "ماتریس وزن" تعریف می‌گردد که برابر است با:

$$P = \sigma_0^2 \sum_L^{-1}$$

$\sum_L$ ماتریس واریانس- کوواریانس مشاهدات می‌باشد که برابر است با:

$$\sum_L = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

(۴-۱)

توجه: اگر مشاهدات دارای واحدهای متفاوت باشند (مثل طول برحسب متر و زاویه برحسب درجه)، باید در ماتریس وزن، واحدها را یکسان نمود.

۱-۸ دقت و صحت (Precision & Accuracy)

دقت[1] عبارتست از درجه‌ی سازگاری یا توافق بین مشاهدات، که بر مبنای مقدار اختلافات در یک نمونه از مشاهدات، تعریف می‌شود.

صحت[2] عبارتست از مقدار اختلاف مشاهده از مقدار واقعی آن مشاهده، یا به عبارت دیگر، بیانگر مقدار نزدیکی مشاهده به اندازه‌ی واقعی آن می‌باشد. به علت اهمیتی که این دو مفهوم دارند برای درک عمیق آنها به مثال زیر توجه نمایید.

فرض کنید برای اندازه‌گیری یک طول، سه روش قدم زدن، مترکشی و طول‌یابی الکترونیکی[3]، بکار رود و هر روش پنج بار تکرار شود، نتایج جدول زیر حاصل خواهد شد:

تکرار	قدم زدن (p)	مترکشی (t)	*EDM (e)*
1	571	567.17	567.133
2	563	567.08	567.124
3	566	567.12	567.129
4	588	567.38	567.165
5	557	567.01	567.140

نتایج، بیانگر این واقعیت است که مشاهدات در مرحله‌ی مترکشی دقیق‌تر از مرحله‌ی قدم زدن و در مرحله‌ی *EDM* دقیق‌تر از مترکشی اندازه‌گیری شده‌اند.

برای درک صحیح فرق بین صحت و دقت، شکل ۱-۲، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این شکل:

a: صحیح است ولی دقیق نیست.

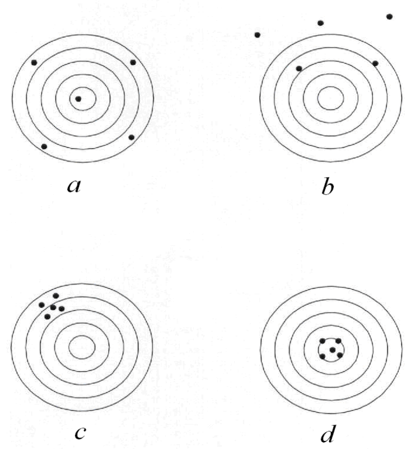
b: نه صحیح است نه دقیق.

c: دقیق است صحیح نیست.

d: دقیق و صحیح است.

---

[1] *Precision*
[2] *Accuracy*
[3] *EDM*



شکل ۱-۲: فرق دقت و صحت

۱-۹ پردازش و ارزیابی مشاهدات

پس از جمع‌آوری مشاهدات، مرحله‌ی مهم پردازش و ارزیابی مشاهدات شروع می‌شود، که به صورت مراحل زیر به انجام می‌رسد:

- ✓ تصحیح مشاهدات از نظر خطاهای سیستماتیک
- ✓ حذف اشتباهات و کنترل کیفیت مشاهدات با استفاده از تست‌های آماری
- ✓ سرشکنی خطاهای تصادفی مشاهدات و محاسبه دقیق مجهولات

برای انجام مراحل فوق لازم است مفاهیمی از جبر خطی که مورد نیاز است به‌طور خلاصه مرور گردد تا با تکیه بر آن بتوان مرحله پروسس مشاهدات را انجام داد.

۱-۱۰ مروری گذرا بر جبر خطی

انتظار می‌رود که خوانندگان این کتاب با ماتریس و عملیات ماتریسی آشنایی کامل داشته باشند. در این قسمت فقط مفاهیم کلی از جبر خطی که در ادامه‌ی مباحث مورد نیاز است، یادآوری می‌گردد.

ابعاد ماتریس: تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس را گویند. A_{mn} یعنی ماتریس A با تعداد m سطر و تعداد n ستون که a_{ij} درایه‌های آن نامیده می‌شوند.

ماتریس ستونی: ماتریسی که دارای فقط یک ستون باشد.

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطر و ستون‌های آن برابر باشند.

ماتریس سینگولار[1]: ماتریسی که دترمینان آن صفر باشد ($det = 0$)؛ وگرنه، ماتریس، غیرسینگولار[2] خواهد بود.

رنک ماتریس: اگر در ماتریسی بتوان بزرگترین زیرماتریس مربعی پیدا کرد که دترمینان آن مخالف صفر شود آنگاه رنک ماتریس برابر مرتبه‌ی زیر ماتریس مذکور می‌باشد. مثلاً:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 12\end{bmatrix}\rightarrow \det(B)=-8\ ,\ \ rank(B)=3 \qquad (۱-۵)$$

ولی در ماتریس زیر چون دترمینان ماتریس برابر صفر است، بنابراین بزرگترین زیر ماتریس مربعی که دترمینان آن مخالف صفر باشد ماتریسی 2×2 خواهد بود لذا:

$$E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{bmatrix}\rightarrow\ rank(E)=2 \qquad (۱-۶)$$

ماتریس وارون‌پذیر: ماتریس مربعی که دترمینان آن مخالف صفر باشد؛ به عبارت دیگر، ماتریس مربعی که غیر سینگولار باشد ($det \neq 0$).

ماتریس قطری: ماتریسی است که درایه‌های غیر قطر اصلی آن (a_{ij}) همگی صفر باشند. از خواص ماتریس قطری این است که اگر در ماتریسی قطری ضرب شود، ماتریس حاصل نیز قطری است.

ماتریس بالا مثلثی: ماتریسی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشند.

ماتریس پائین مثلثی: ماتریسی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

ماتریس متقارن: ماتریسی است که درایه‌های یکسان آن در بالای قطر اصلی و در پایین قطر اصلی با هم برابرند.

۱- ۱۰-۱ عملیات ماتریس‌ها

ترانسپوز: جای سطرها و ستون‌های یک ماتریس با هم عوض می‌شوند.

---

[1] *Singular*
[2] *Non Singular*

از خواص ترانسپوز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$1)\quad (A^T)^T = A$$
$$2)\quad (AB)^T = B^T A^T \qquad (۱-۷)$$

اگر ماتریس A قطری باشد در این صورت:
$$3)\quad A^T = A$$

ضرب ماتریس: درایه‌های متناظر در یک سطر از ماتریس با درایه‌های متناظر در یک ستون از ماتریس دیگر در هم ضرب می‌شوند و حاصل ضرب آنها جمع شده و آنگاه درایه‌ی متناظر در ماتریس حاصل‌ضرب به دست می‌آید.

معکوس کردن یک ماتریس: وارون‌کردن ماتریس‌های مربع وقتی امکان‌پذیر می‌باشد که:

نخست: دترمینان آن ماتریس صفر نباشد ($det \neq 0$).

دوم اینکه: رنک آن ماتریس مربع کامل باشد.

توجه: وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهند و همواره رابطه‌ی $A^{-1}A = I$ برقرار است.

۱-۱۰-۲ حل دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی شامل m معادله با n مجهول، یعنی $X_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$ در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{nm} = b_m \end{cases} \qquad (۱-۸)$$

ضـــرائب a_{ij} و b_j معلوم و ثابت می‌باشند. فرم ماتریسی معادلات بـالا بـه این صـورت است:

$$A_{mn}X_{n1} = b_{m1} \rightarrow AX = b \qquad (۱-۹)$$

که A ماتریس ضرائب است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۱)$$

این ماتریس دارای اهمیت زیادی می‌باشد و در قابل‌حل یا غیرقابل حل بودن سیستم معادلات خطی نقش اساسی دارد.

اگر بردار b صفر باشد دستگاه معادلات خطی **همگن** است و اگر غیر صفر باشد دستگاه معادلات **ناهمگن** می‌باشد.

برای حل این سیستم روش‌های متعددی وجود دارد که یکی از این روش‌ها، روش **کمترین مربعات** است، که در این کتاب به آن پرداخته خواهد شد. پس برای اینکه بتوان از روش کمترین مربعات استفاده نمود، لازم است که تعداد معادلات، بیشتر از مجهولات باشد.

اگر $b = 0$ و تعداد مشاهدات بیشتر از مجهولات باشد، روش کمترین مربعات مطلوب‌ترین حالت می‌باشد.

۱-۱۱ مروری گذرا بر تئوری خطاها

انتظار می‌رود که خوانندگان این کتاب با بحث‌های مربوط به تئوری خطاها آشنایی داشته باشند؛ برای یادآوری لازم است خلاصه‌ای از این مطالب بازگو گردد. همانطور که در بخش مشاهدات عنوان شد، مشاهدات نقشه‌برداری، دارای خطا بوده و مفاهیم انحراف معیار و وزن، مشخص کننده کیفیت مشاهدات می‌باشند. از سویی دیگر، با این مشاهدات خطادار، یکسری مجهولات محاسبه می‌شود. اینک این سوال مهم مطرح می‌شود که با توجه به دقت مشاهدات، دقت مجهول محاسبه شده چقدر است؟

مثلا با استفاده از یک دستگاه توتال استیشن که انحراف معیار اندازه‌گیری طول با آن برابر $\pm 2_{mm} \pm 2_{ppm}$ بوده و انحراف معیار اندازه‌گیری زاویه $\pm 5''$ است و با استفاده از دو نقطه ثابت و مختصات‌دار و بدون خطای A و B، نقطه مجهول M با استفاده از فرمول‌های زیر (مدل ریاضی) مختصات‌دهی شده است، دقت X_m و Y_m چقدر است؟ (شکل ۱-۳)

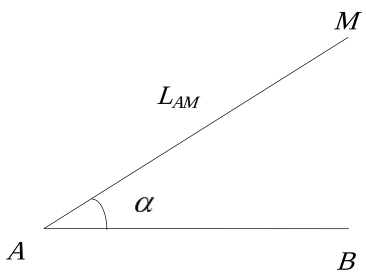
$$X_M=X_A+L_{AM}SIN(G_{AM}=G_{AB}-\alpha) \qquad (۱۱-۱)$$

$$Y_M=Y_A+ L_{AM}COS(G_{AM}=G_{AB}-\alpha)$$

در فرمول‌های بالا (مدل ریاضی)، بردار مجهولات و بردار مشاهدات عبارتند از:

$$L = \begin{bmatrix} L_{AM} \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix}$$

و بردار ثوابت مدل ریاضی، مختصات معلوم دو نقطه A و B می‌باشند.



شکل ۱-۳؛ مختصات‌دهی به نقطه مجهول

انحراف معیار مشاهدات را می‌توان در قالب ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات و به فرم زیر عنوان نمود.

$$\Sigma_L = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha{}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_l{}^2 \end{bmatrix}$$

با توجه به موارد ذکر شده، برای پاسخ به سوال اساسی فوق باید از قانون "انتشار ماتریس واریانس کوواریانس" استفاده نمود.

بر اساس این قانون و با توجه به ساختار مدل ریاضی که به فرم $X=F(L)$ است انحراف معیار مجهولات یا به‌عبارت دقیق‌تر ماتریس واریانس کوواریانس مجهولات، از رابطه $\Sigma_X = B\ \Sigma_L\ B^T$ (۱-۱۲) محاسبه خواهد شد.

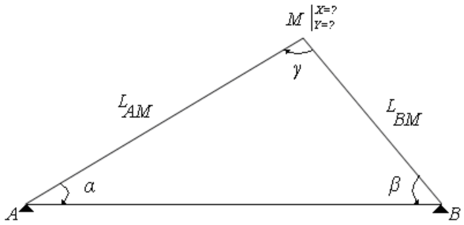
در این رابطه ماتریس B، ماتریس ضرائب نامیده می‌شود و درایه‌های آن به‌شرح زیر محاسبه می‌گردد:

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial L_1} & \frac{\partial X_1}{\partial L_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial X_1}{\partial L_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial L_1} & \frac{\partial X_2}{\partial L_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial X_2}{\partial L_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_u}{\partial L_1} & \frac{\partial X_u}{\partial L_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial X_u}{\partial L_n} \end{bmatrix} \tag{۱۳-۱}$$

و ماتریس واریانس کوواریانس مجهولات دارای ساختار زیر خواهد بود:

$$\sum_X=\begin{bmatrix} {\sigma_x}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & {\sigma_y}^2 \end{bmatrix} \tag{۱۴-۱}$$

اگر ساختار مدل ریاضی و همچنین شکل شبکه نقشه‌برداری به سادگی این مثال نبوده و یا به‌عبارت دیگر برای محاسبه مجهولات، تعداد زیادی مشاهده جمع‌آوری شده باشد، آیا باز هم می‌توان از قانون مذکور استفاده نمود؟ مثلا اگر برای محاسبه مختصات مجهول نقطه M، مشاهدات دیگری نیز مثل شکل زیر وجود داشته باشد راه حل چیست؟



شکل ۱-۴: مشاهدات بیش از مورد نیاز

یعنی اگر بردار مشاهدات به‌شکل زیر باشد، برای محاسبه بردار مجهولات و نیز محاسبه دقت مجهولات آیا روش فوق جوابگو می‌باشد؟

$$L=\begin{bmatrix} L_{AM} \\ L_{BM} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ و } X=\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix}$$

برای جواب این سوال و برای حل شبکه‌های مختلف نقشه‌برداری و ژئودزی، روش سرشکنی کمترین مربعات، یک راه حل دقیق و مبتنی بر علم ریاضی می‌باشد که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

سرشکنی مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها، با روش‌های مختلف ریاضی صورت می‌پذیرد، که از بین این روش‌ها، *روش کمترین مربعات*[1]، روشی است که مبتنی بر ریاضی و آمار بوده و از دیدگاه ریاضی بهترین و دقیق‌ترین روش می‌باشد. این روش سرشکنی بر اساس مینیمم کردن مقدار بردار اختلافات یا بردار باقیمانده‌ها بوده و با انجام این روش موارد زیر تحقق می‌یابند:

۱. مجموع تمامی تصحیحات مربوط به سرشکنی مینیمم می‌شود.
۱. تصحیح با مقدار ماکزیمم نیز مینیمم می‌گردد.
۲. مجموع توان دوم تمامی مقادیر تصحیحات سرشکنی مینیمم می‌شود.

با تحقق این سه شرط، کمترین انحراف از مقدار واقعی وجود خواهد داشت.

[1] *Least Square Adjustment Method* (*L.S.A*)